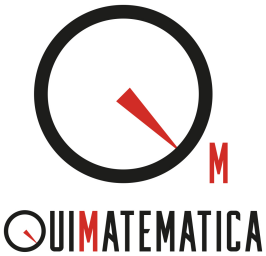
Le dispense di
Qui Matematica

Come invertire le formule con moltiplicazioni e divisioni

Claudio Signorini
claudio@quimatematica.it

18 Dicembre 2020



https://www.quimatematica.it
https://www.youtube.com/quimatematica
https://www.facebook.com/quimatematica
https://www.instagram.com/quimatematica
https://www.patreon.com/quimatematica
https://www.paypal.me/quimatematica

Capitolo 1

Introduzione

In fisica si studia che la densità di un corpo è pari al rapporto tra la sua massa e il volume che occupa.

$$\text{densità} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

In simboli indichiamo la densità con d, la massa con m e il volume con V.

$$d = \frac{m}{V}$$

Ma questa formula permette solo di calcolare la densità conoscendo la massa e il volume. Non ci permette di calcolare la massa conoscendo la densità e il volume. Nè ci permette di calcolare il volume conoscendo la massa e la densità.

Ma noi abbiamo bisogno di poter scrivere qualosa come:

$$\text{massa} = ?$$

e anche di poter scrivere

$$\text{volume} = ?$$

Ma cosa?

Dobbiamo imparare a *invertire la formula.*

In questa guida e nelle risorse collegate mi concentrerò su formule che contengono moltiplicazioni e divisioni. Solitamente sono queste, infatti, le formule che creano qualche difficoltà.

Buono studio!

Capitolo 2

Metodo grafico

Esiste un metodo semplice, basato su un trucchetto grafico, che permette di invertire le formule basate su moltiplicazioni o divisioni.

Trovi la spiegazione in questo video:

https://youtu.be/bgHnrtPOIS0

Capitolo 3

Metodo algebrico

Il metodo algebrico per invertire una formula è sicuramente più rigoroso di quello grafico e può essere applicato anche quando una formula non è semplicemente una moltiplicazione o una divisione.

Il metodo si basa sulla *seconda legge di monotonia per le uguaglianze*:

Data un'uguaglianza, essa non cambia se moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri per una stessa quantità (diversa da zero).

Proviamo allora ad invertire la formula della densità per ottenere il modo per calcolare la massa.

$$d = \frac{m}{V}$$

Possiamo moltiplicare entrambe i membri per il volume:

$$d \cdot V = \frac{m}{V} \cdot V$$

Ora semplifichiamo:

$$d \cdot V = \frac{m}{\cancel{V}} \cdot \cancel{V}$$

$$d \cdot V = m$$

E poichè vale la *proprietà simmetrica dell'uguaglianza* (se $x = y$ allora $y = x$) possiamo scrivere:

$$m = d \cdot V$$

Ovviamente la scelta di moltiplicare per V non è stata casuale: è stata guidata dalla necessità di *togliere* V dal denominatore della frazione in cui compare m, che è la variabile che volevamo isolare.

Similmente possiamo fare per invertire la formula ed ottenere il modo per calcolare il volume. In questo caso abbiamo bisogno di fare qualche passaggio in più. Prima di tutto dobbiamo portare il volume a numeratore e possiamo farlo ancora una volta, moltiplicando i membri dell'uguaglianza per V.

$$d = \frac{m}{V}$$

$$d \cdot V = \frac{m}{V} \cdot V$$

$$d \cdot V = \frac{m}{\cancel{V}} \cdot \cancel{V}$$

$$d \cdot V = m$$

Ora dobbiamo isolare V nel primo membro dell'uguaglianza, per cui dobbiamo dividere entrambe i membri per d.

$$\frac{d \cdot V}{d} = \frac{m}{d}$$

$$\frac{\cancel{d} \cdot V}{\cancel{d}} = \frac{m}{d}$$

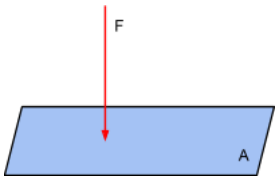
$$V = \frac{m}{d}$$

Capitolo 4

Un esempio completo

Consideriamo la definizione di pressione esercitata da una forza (perpendicolare) su una superficie, chiamando P la pressione, F la forza e A l'area della superficie.

$$P = \frac{F}{A}$$



La forza si misura in newton (N), mentre l'area si misura in metri quadri (m^2). Per cui la pressione si misura in newton su metri quadri ($\mathrm{N/m}^2$). A questo unità di misura è stato dato il nome di pascal (Pa), ma in questo dispensa userò solo l'unità $\mathrm{N/m}^2$.

Facciamo subito lo schema grafico come visto nel video.

$$\begin{array}{c|c} F & \\ \hline P & A \end{array}$$

Quiz 1. Un libro è appoggiato su un tavolo. La forza che il libro esercita sul tavolo è $F = 7,8$ N. L'area della superficie del libro è $A = 0,060\ \mathrm{m}^2$. Calcola la pressione esercitata dal libro sul tavolo.

In questo quiz conosciamo la forza F e l'area A, per cui ci basta applicare la definizione di pressione.

$$P = \frac{F}{A} = \frac{7,8\ \mathrm{N}}{0,060\ \mathrm{m}^2} = 130\ \mathrm{N/m}^2$$

Quiz 2. Un libro è appoggiato su un tavolo. La pressione che il libro esercita sul tavolo è $P = 130\ \mathrm{N/m}^2$. L'area della superficie del libro è $A = 0,060\ \mathrm{m}^2$. Calcola la forza esercitata dal libro sul tavolo.

Per risolvere questo quiz dobbiamo invertire la formula della pressione per poter calcolare la forza.

Applichiamo prima il metodo grafico. Come spiegato nel video dobbiamo cancellare la forza F dallo schema.

$$\begin{array}{c} \cancel{F} \\ \hline P \mid A \end{array}$$

Le rimanenti variabili sono sulla stessa riga, per cui dobbiamo moltiplicarle. Otteniamo quindi la formula per calcolare la forza F.

$$F = P \cdot A$$

La stessa formula potevamo ottenerla moltipliando i membri della definizione di pressione per A.

$$\begin{aligned} P &= \frac{F}{A} \\ P \cdot A &= \frac{F}{A} \cdot A \\ P \cdot A &= \frac{F}{\cancel{A}} \cdot \cancel{A} \\ P \cdot A &= F \\ F &= P \cdot A \end{aligned}$$

Trovata la formula possiamo sostituire i dati e ottenere il risultato.

$$F = P \cdot A = 130 \text{ N/m}^2 \cdot 0,060 \text{ m}^2 = 7,8 \text{ N}$$

Quiz 3. Un libro è appoggiato su un tavolo. La forza che il libro esercita sul tavolo è $F = 7,8$ N. La pressione che il libro esercita sul tavolo è $P = 130$ N/m^2. Calcola l'area della superficie del libro.

Per risolvere questo quiz dobbiamo invertire la formula della pressione per poter calcolare l'area.

Applichiamo prima il metodo grafico. Come spiegato nel video dobbiamo cancellare l'area A dallo schema.

$$\begin{array}{c} F \\ \hline P \mid \cancel{A} \end{array}$$

Rimangono F in alto e P in basso, per cui dobbiamo fare la frazione con queste due variabili. Otteniamo quindi la formula per calcolare l'area A.

$$A = \frac{F}{P}$$

La stessa formula potevamo ottenerla prima moltiplicando i membri della definizione di pressione per A e poi dividendo per P.

$$P = \frac{F}{A}$$

$$P \cdot A = \frac{F}{A} \cdot A$$
$$P \cdot A = \frac{F}{\cancel{A}} \cdot \cancel{A}$$
$$P \cdot A = F$$
$$\frac{P \cdot A}{P} = \frac{F}{P}$$
$$\frac{\cancel{P} \cdot A}{\cancel{P}} = \frac{F}{P}$$
$$A = \frac{F}{P}$$

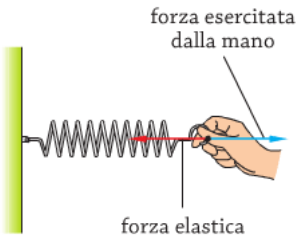
Trovata la formula possiamo sostituire i dati e ottenere il risultato.

$$A = \frac{F}{P} = \frac{7,8 \text{ N}}{130 \text{ N/m}^2} = 0,060 \text{ m}^2$$

Capitolo 5

Un esercizio

Una *molla* non è altro che una macchina che trasforma una forza in uno spostamento (la compressione o l'allungamento della molla stessa)... e viceversa.



Se non esageriamo, la forza (F) e lo spostamento (s) sono tra loro direttamente proporzionali. Il loro rapporto (costante intrinseca di ogni molla) si chiama *coefficente elastico* (k).

$$k = \frac{F}{s}$$

Dal momento che la forza si misura in newton (N) e lo spostamento in metri (m), il coefficiente elastico si misura in newton su metro (N/m).

Quiz 1. Abbiamo una molla con coefficiente elastico $k = 1000$ N/m. Di quanto si allunga la molla se vi applichiamo una forza di 100 N?

Quiz 2. Abbiamo una molla con coefficiente elastico $k = 200$ N/m. Quale forza è necessario applicarvi per allungarla di 5 cm?

Indice

1 Introduzione **1**

2 Metodo grafico **2**

3 Metodo algebrico **3**

4 Un esempio completo **5**

5 Un esercizio **8**